Übung 6

-

Wahrscheinlichkeit
Musterlösung

Aktuelle Version: 7. Juli 2022

Hinweise:

- Übungen sind mit Vorteil alleine zu lösen.
- Benutzen Sie die Musterlösungen nur zur Korrektur.
- Die Übungen sind wichtige Vorbereitungen für die Prüfung. Lösen sie die Übungen sorgfältig und stellen Sie die Lösungswege übersichtlich dar.
- (Ergänzte) Vorlesungsunterlagen und Fachbücher helfen beim Lösen von Übungen und bringen gleichzeitig eine erweiterte Ansicht auf die Problemstellung.
- Wenn Sie die Übungen nicht verstehen, fragen Sie!

Übung 1. *Fragen*

1. Erläutern Sie die Begriffe Zufallsexperiment und Ergebnismenge.

   Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der beliebig oft wiederholbar werden kann und dessen Ergebnis vom Zufall abhängt. Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bilden die Ergebnismenge.

2. Erläutern Sie den Begriff Wahrscheinlichkeitsraum.

   Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ wird zur mathematischen Beschreibung von Zufallsexperimenten verwendet. Ein Wahrscheinlichkeitsraum wird mittels drei Elemente beschrieben:

   - Der Ergebnismenge Ω mit allen möglichen Ergebnissen des Zufallsexperiments.
   - Dem System der Ereignisse $\mathcal{A}$, eine Menge von Teilmengen von Ω.
   - Dem Wahrscheinlichkeitsmass $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$, welchem jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

3. Erläutern Sie die Begriffe Elementarereignis, sicheres Ereignis sowie unmögliches Ereignis.

   - Ein Elementarereignis umfasst nur ein Ergebnis, es ist eine einelementige Teilmengen der Ergebnismenge Ω.
   - Ein sicheres Ereignis tritt sicher ein und umfasst die gesamte Ereignismenge Ω.
   - Ein unmögliches Ereignis tritt nie ein und umfasst die Nullmenge $\emptyset$.

4. Was ist ein Laplace-Experiment?

   Ein Laplace Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse gleich sind.

5. Wann sind zwei Ereignisse disjunkt?

   Zwei Ereignisse sind disjunkt (einander ausschliessend), wenn ihr Durchschnitt leer ist.

6. Was verstehen Sie unter bedingter Wahrscheinlichkeit?

   Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Voraussetzung B.

7. Was besagt der Satz von Bayes?

   Der Satz von Bayes besagt, dass zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen die folgende Beziehung besteht:

   $$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

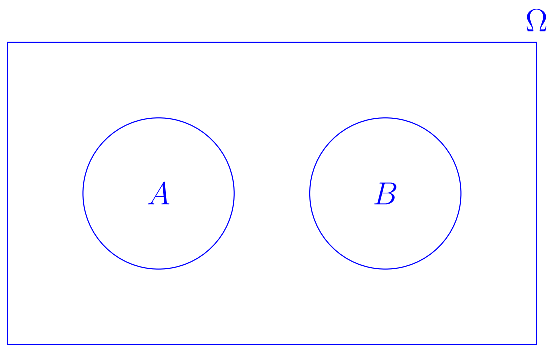
Übung 2. *Ergebnismengen*
Bestimmen Sie die folgenden Ergebnismenge und geben Sie je ein Bespiel für ein mögliches, ein sicheres und ein unmögliches Ereignis.

1. Lotto-Zahlen (Schweizer Lotto)
   - Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, ..., 42\}$
   - Mögliches Ereignis: Eine 1 wird gezogen.
   - Sicheres Ereignis: Eine Zahl kleiner 43 wird gezogen.
   - Unmögliches Ereignis: Eine 0 wird gezogen.
2. Münzwurf
   - Ergebnismenge $\Omega = \{Kopf, Zahl\}$
   - Mögliches Ereignis: Es wird Kopf geworfen.
   - Sicheres Ereignis: Es wird Kopf oder Zahl geworfen.
   - Unmögliches Ereignis: Es wird weder Kopf noch Zahl geworfen.
3. Wurf mit zwei Würfeln
   - Ergebnismenge $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..(6, 6)\}$
   - Mögliches Ereignis: Es wird das Paar (6, 6) geworfen.
   - Sicheres Ereignis: Beide Augenzahlen sind kleiner gleich 6.
   - Unmögliches Ereignis: Es wird ein Paar mit einer Augensumme > 12 geworfen.

Übung 3. *Venn-Diagramme und symbolische Schreibweise*
Stellen Sie die folgenden Aussagen über Ereignisse in Venn-Diagrammen und in symbolischer Schreibweise dar:

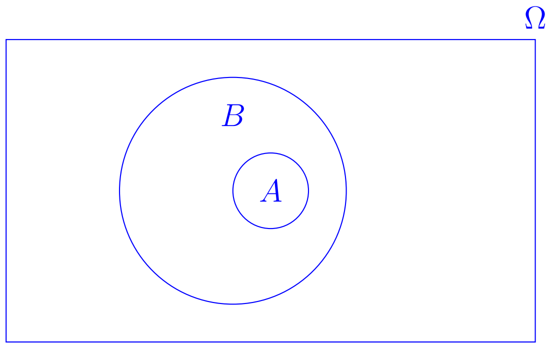
1. Die Ereignisse A und B schliessen sich aus.

   Die Ereignisse A und B können nicht gemeinsam auftreten, d.h. die Schnittmenge zwischen beiden Ereignissen ist die leere Menge: $A \cap B = \emptyset$.



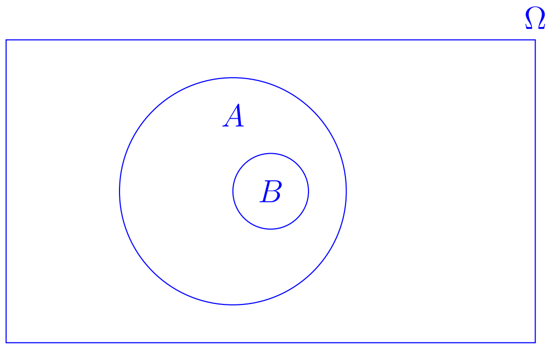
2. Immer wenn sich A ereignet, ereignet sich auch B.

   A ist also Teilmenge von B: $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$.



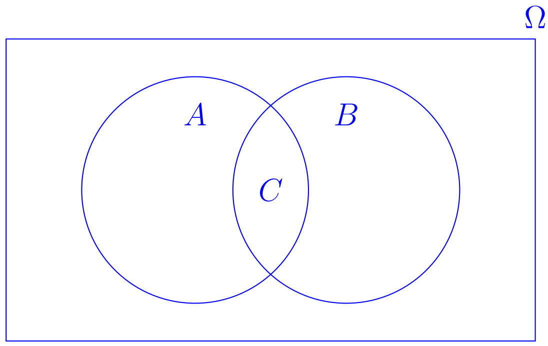
3. B ereignet sich nur, wenn sich auch A ereignet.

   B ist also Teilmenge von A: $B \subset A \rightarrow A \cap B = B$.



4. C ereignet sich nur dann, wenn sich sowohl A als auch B ereignen.

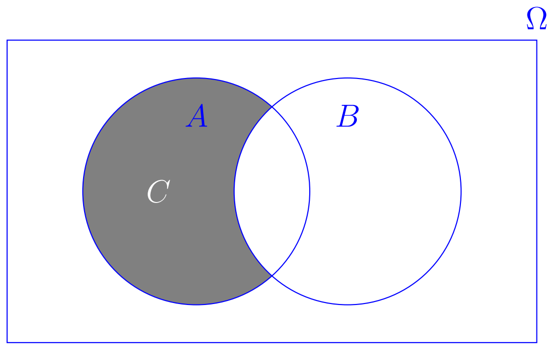
   Sowohl A und B müssen sich ereignen, damit sich C ereignet. D.h. C ist die Schnittmenge von A und B: $C = A \cap B$.



5. C ereignet sich genau dann, wenn sich zwar A, aber nicht B ereignet.

   Das Ereignis C tritt auf, wenn sich A nicht aber B ereignet. Also A ohne B.

   $C = A \setminus B$



Übung 4. *Zufallsexperimente*
Ein Zufallsexperiment hat 10 verschiedene Ergebnisse: 1, 2, ..., 10. Aus inhaltlichen Überlegungen weiss man, dass Ereignis 2 gerade doppelt so wahrscheinlich ist wie 1, das Ereignis 3 dreimal so wahrscheinlich wie 1 usw. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses 1?

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist per Definition 1. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 &= P\{1\} \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) \\ P\{1\} &= \frac{1}{55} \end{aligned}$$

Übung 5. *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
Für eine Studie über die Wirksamkeit von Grippeschutzimpfungen wurden 960 Personen danach befragt, ob sie vor dem letzten Winter gegen Grippe geimpft waren und ob sie an Grippe erkrankt waren oder nicht:

	erkrankt	nicht erkrankt
geimpft	117	389
nicht geimpft	289	165

		B		
		erkrankt	nicht erkrankt	
A	geimpft	117	389	506
	nicht geimpft	289	165	454
		406	554	960

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, an Grippe zu erkranken?

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{406}{960} = 42.3\%$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person nicht geimpft ist?

$$P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{454}{960} = 47.3\%$$

3. Ist die Grippeimpfung wirksam?

   Die Wahrscheinlichkeit, trotz Impfung zu erkranken ist:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{117}{506} = 23.1\%$$

   Die Impfung scheint wirksam zu sein.

4. Welche Umfragezahlen würden Sie erwarten, falls Grippe und Impfung unabhängig wären und die Gesamtzahlen gleichbleiben? Was schliessen Sie aus diesen Zahlen?

   Wir wollen hier also eine theoretische Verteilung berechnen. Durch den Vergleich dieser theoretischen Verteilung mit der empirischen Verteilung können wir eine erste Abschätzung geben, ob die beiden Merkmale Grippe und Impfung abhängig oder unabhängig voneinander sind. Stimmen die Werte in etwa überrein, können wir davon aussgehen, dass die Merkmale unabhängig sind, d.h. die Impfung hat keinen Einfluss auf die Erkrankung [1].

   Für stochastisch unabhängige Ereignisse gilt:

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= P(X)P(Y) \\ \frac{|X \cap Y|}{|\Omega|} &= \frac{|X|}{|\Omega|}\frac{|Y|}{|\Omega|} \\ |X \cap Y| &= \frac{|X||Y|}{|\Omega|} \end{aligned}$$

   Wir erhalten:

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= \frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{|506||406|}{960} = 214 \\ |A \cap \bar{B}| &= \frac{|A||\bar{B}|}{|\Omega|} = \frac{|506||554|}{960} = 292 \\ |\bar{A} \cap B| &= \frac{|\bar{A}||B|}{|\Omega|} = \frac{|454||406|}{960} = 192 \\ |\bar{A} \cap \bar{B}| &= \frac{|\bar{A}||\bar{B}|}{|\Omega|} = \frac{|454||554|}{960} = 262 \end{aligned}$$

[1] Für eine genaue Berechnung siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Kontingenzkoeffizient

		B		
		erkrankt	nicht erkrankt	
A	geimpft	**214**	**292**	506
	nicht geimpft	**192**	**262**	454
		406	554	960

Die Zahlen weichen erheblich von den Umfragewerte ab, was einen Hinweis auf die Abhängigkeit der beiden Ereignisse gibt.

Übung 6. *Satz von Bayes*

Schlafstörungen kann als Symptom sowohl bei einer Major Depression als auch bei einer generalisierten Angststörung auftreten. 15% der Bevölkerung leidet aber auch ohne Depression oder Angststörung an Schlafstörungen!

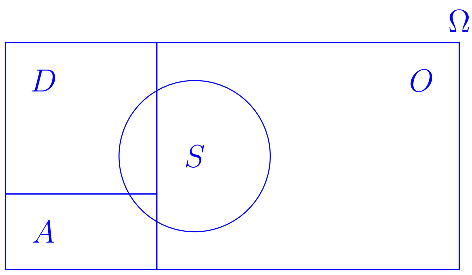
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, an einer Angststörung oder Depression zu leiden, wenn Sie unter Schlafstörungen leiden?

Gehen Sie von den folgenden Prävalenzen (Auftretenswahrscheinlichkeiten) aus:

Störung	Prävalenz	davon mit Schlafstörungen
Major Depression	0.057	0.1
Generalisierte Angststörung	0.02	0.3

Gehen Sie zudem davon aus, dass es keine Komorbidität gibt, d.h. es gibt kein gemeinsames Auftreten von Krankheiten.

Wir definieren die Ereignisse Major Depression D, generalisierte Angststörung A, weder noch O sowie Symptom S.



Die folgenden Wahrscheinlichkeiten kennen wir bereits:

$$
\begin{aligned}
&P(D) = 0.057 && P(S|D) = 0.1 \\
&P(A) = 0.02 && P(S|A) = 0.3 \\
&P(O) = 1 - P(D) - P(A) = 0.923 && P(S|O) = 0.15
\end{aligned}
$$

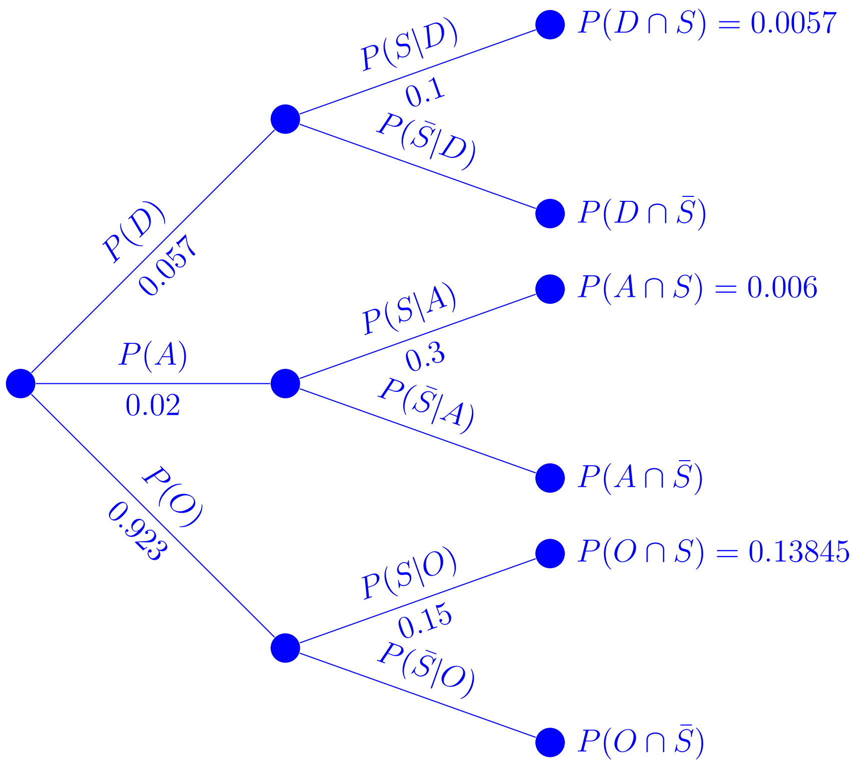
Wir suchen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(D|S)$ und $P(A|S)$, welche wir mit Hilfe des Satzes von Bayes berechnen können:

$$\begin{aligned} P(D|S) &= P(S|D)\frac{P(D)}{P(S)} \\ P(A|S) &= P(S|A)\frac{P(A)}{P(S)} \end{aligned} \tag{1}$$

Es fehlt nun einzig die Warhscheinlichkeit für eine Schlafstörung $P(S)$. Da die Ereignisse D, A und O unabhängig sind, kann man diese Wahrscheinlichkeit aus den einzelnen Schnittmengen $P(D \cap S)$, $P(A \cap S)$ und $P(O \cap S)$berechnen. Es gilt mit dem Multiplikationssatz bei bedingten Wahrscheinlchkeiten:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(D \cap S) + P(A \cap S) + P(O \cap S) \\ P(S) &= P(D)P(S|D) + P(A)P(S|A) + P(O)P(S|O) \\ P(S) &= 0.057 \cdot 0.1 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.923 \cdot 0.15 = 0.15015 \\ P(S) &= 0.0057 + 0.006 + 0.13845 = 0.15015 \end{aligned}$$

Der dazugehörige Wahrscheinlichkeitsbaum:



Mit $P(S)$ bekannt, können wir nun die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$
\begin{aligned}
P(D|S) &= P(S|D)\frac{P(D)}{P(S)} = 0.1\frac{0.057}{0.15015} = 0.038 \\
P(A|S) &= P(S|A)\frac{P(A)}{P(S)} = 0.3\frac{0.02}{0.15015} = 0.04 \\
P(O|S) &= P(S|O)\frac{P(O)}{P(S)} = 0.15\frac{0.923}{0.15015} = 0.922
\end{aligned} \tag{2}
$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei Schlafstörungen an einer Major Depression erkrankt sind ist demnach nur 3.8%; die Wahrscheinlichkeit, an einer generalisierten Angststörung erkrankt zu sein nur 4%.

Zusatzaufgaben

Übung 7. *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Werfen eines Würfels eine Augensumme von mindestens 8 zu erhalten, falls beim ersten Wurf eine 4 gefallen ist?

Wir definieren zwei Ereignisse:

- A: Augensumme ist mindestens 8.
- B: Beim ersten Wurf wurde eine 4 gewürfelt.

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$, welche wir wie folgt berechnen:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Wurf eine 4 zu würfeln ist $P(B) = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Wurf eine 4 zu würfen sowie eine Augenzahl von mindestens 8 zu würfeln können wir mit einem Laplace-Experiment ermitteln: Anzahl günstigen Fälle ist 3 ($(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$), Anzahl möglichen Fälle $6^2 = 36$ - wir erhalten $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Es folgt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{12} = 50\%$$

Übung 8. *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
Zwei Karten werden aus einem gut gemischten Spiel von 52 Karten gezogen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beides Asse sind, wenn die erste Karte

Wir verwenden die folgenden Ereignisse:

- E1: Ass beim ersten Zug
- E2: Ass beim zweiten Zug

1. zurückgelegt wird

   Wird die erste Karte zurückgelegt, so sind E1 und E2 unabhängige Ereignisse, denn in beiden Fällen gehen sie von den gleichen Bedingungen aus: Es sind noch 4 Asse im Spiel und die Anzahl der Spielkarten ist gleich.

$$P\{zweiAsse\} = P(E1)P(E2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = 5.92 \cdot 10^{-3}$$

2. nicht zurückgelegt wird

   Wird die Karte nicht zurückgelegt, reduziert sich sowohl die Anzahl der Asse als auch die Anzahl der Spielkarten um 1 für die Berechnung von E2. Jetzt ist der Ausgang des Experimentes nicht mehr unabhängig voneinander.

   Beim Ziehen der ersten Karte gibt es 52 Möglichkeiten und bei der zweiten 51 Möglichkeiten. Es gibt 4 Fälle in denen E1 vorkommen kann und 3 Fälle in denen E2 in Abhängigkeit zu E1 vorkommen kann.

$$P\{zweiAsse\} = P(E1) * P(E2|E1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = 4.52 \cdot 10^{-3}$$

Übung 9. *Wahrscheinlichkeitsbaum*
Ein Koch-Lehrling versalzt seine Suppe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5. Wenn er verliebt ist – ein Zustand, in dem er sich mit Wahrscheinlichkeit 0.4 befindet – ist es ganz schlimm: Dann versalzt er nämlich 80% seiner Suppen. Hinweis: Verwenden Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum!

Wir definieren zwei Ereignisse:

- L: Der Lehrling ist verliebt mit $P(L) = 0.4$.
- S: Der Lehrling versalzt seine Suppe mit $P(S) = 0.5$.

Wir können direkt die Gegenwahrscheinlichkeiten berechnen:

$$P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 0.6$$
$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0.5$$

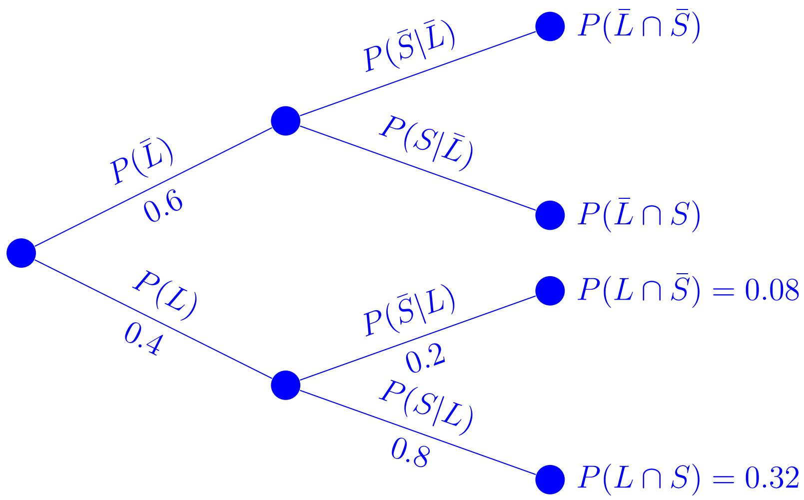
Zudem kennen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der verliebte Lehrling die Suppe versalzt und können die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit berechnen.

$$P(S|L) = 0.8$$
$$P(\bar{S}|L) = 1 - P(S|L) = 0.2 \tag{3}$$

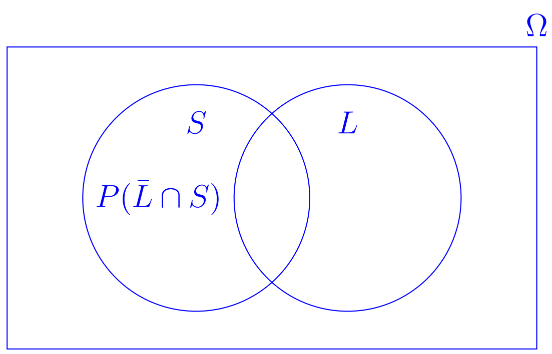
Mit dem Multiplikationssatz berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeiten, dass der verliebte Lehrling die Suppe versalzt oder nicht:

$$P(L \cap S) = P(S|L) \cdot P(L) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32$$
$$P(L \cap \bar{S}) = P(\bar{S}|L) \cdot P(L) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$$

Wir kennen nun bereits den halben Wahrscheinlichkeitsbaum:



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Suppe versalzen ist beträgt $P(S)$ und zwar in beiden Fällen, im verliebten oder nicht verliebten Zustand:



$$P(S) = P(\bar{L} \cap S) + P(L \cap S)$$
$$P(\bar{L} \cap S) = P(S) - P(L \cap S) = 0.5 - 0.32 = 0.18$$

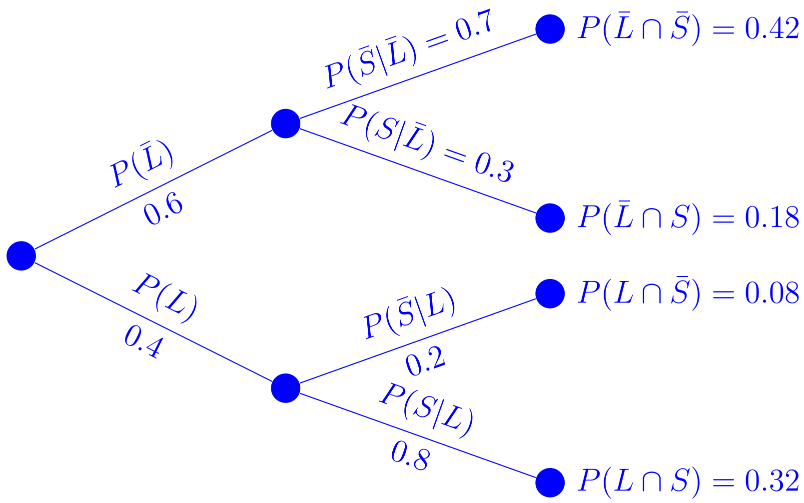
Mit dem Multiplikationssatz berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrling die Suppe versalzt, wenn er nicht verliebt ist:

$$P(S|\bar{L}) = \frac{P(\bar{L} \cap S)}{P(\bar{L})} = \frac{0.18}{0.6} = 0.3$$
$$P(\bar{S}|\bar{L}) = 1 - P(S|\bar{L}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Schliesslich wissen wir noch, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ist. Damit folgt:

$$P(\bar{L} \cap S) = 1 - P(L \cap S) - P(L \cap \bar{S}) - P(\bar{L} \cap S)$$
$$P(\bar{L} \cap S) = 1 - 0.32 - 0.08 - 0.18 = 0.42$$

Der Wahrscheinlichkeitsbaum ist damit vollständig:



1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrling nicht verliebt ist und die Suppe versalzt?

$$P(\bar{L} \cap S) = 0.18$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er verliebt ist, wenn die Suppe nicht versalzen schmeckt?

$$P(L|\bar{S}) = \frac{P(L \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0.08}{0.5} = 0.16$$

3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er weder verliebt ist noch die Suppe versalzt?

$$P(\bar{L} \cap \bar{S}) = 0.42$$