Die Begriffe „statisch bestimmt", „statisch unbestimmt" und „statisch überbestimmt" sind bekannt, aber bei ihrer Verwendung herrscht großes Durcheinander (im Bild: Bau mit Stahlrahmen). *Foto: PantherMedia/levkro*

Statische Bestimmtheit – alles klar?

J. Kunz

Man möchte meinen, dass die statische Bestimmtheit als Thema der Statik starrer Körper zu keinerlei Erörterungen Anlass gibt, weil ja längst alles klar ist. Der Blick in das neuere Schrifttum und ins Internet zeigt aber, dass dies leider nicht zutrifft. Es erscheint daher angebracht, an die klassischen Grundlagen und die dem Thema innewohnende Ordnung zu erinnern.

Klarheit der Begriffe

Es verwundert wenig, dass die statische Bestimmtheit in der zeitgenössischen Fachliteratur keinen großen Platz einnimmt. Nachdenklich stimmt aber die Beobachtung, wie häufig in deutschsprachigen Fachtexten mit unklaren und verwirrenden Begriffen gearbeitet wird, obwohl alles vor über hundert Jahren als klare und logische Grundlage der technischen Mechanik eingeführt worden war [1, 2].

Dass „statisch bestimmt“ die eindeutige Lösbarkeit eines statischen Problems mit den Sätzen der Starrkörpermechanik [3] bezeichnet, ist allgemein klar. Bei den Begriffen „statisch unbestimmt“ und „statisch überbestimmt“ aber herrscht ein großes Durcheinander. So gibt es Darstellungen, in denen die beiden Prädikate für die je umgekehrte Bedeutung verwendet werden [4, 5]. Die Charakterisierung eines Problems als „statisch unbestimmt (überbestimmt)“ [6, 7] ist unsinnig und sieht aus, als ob der Leserschaft eine Auswahl überlassen würde. Der Begriff „statisch unbestimmbar“ anstelle von „statisch unbestimmt“ [8] ist für sich zwar verständlich, doch fehlt dann das entsprechende Pendant für „statisch überbestimmt“. Und wenn das herkömmliche Gegensatzpaar „statisch unbestimmt – statisch überbestimmt“ durch „statisch unbestimmt – statisch unterbestimmt“ ersetzt wird [9], ist das allein schon in sprachlicher Hinsicht unlogisch und wenig verständnisfördernd. Eindeutige Begriffe und ihre einheitliche Handhabung sind aber unabdingbar für die Fachsprache, um sich – auch über Sprachgrenzen hinaus – ohne Missverständnisse verständigen zu können. Vor diesem Hintergrund sind die nachfolgenden Darlegungen zu verstehen.

Grundlage der Statik starrer Körper

Die Altmeister der technischen Mechanik haben die Begriffe der statischen Bestimmtheit beziehungsweise Unbestimmtheit aus jenen des mathematischen Problems übernommen, das bei der Gleichgewichtsaufgabe zu lösen ist (**Bild 1**). Demnach ist die Lagerung eines ruhenden Körpers auf seiner Unterlage statisch bestimmt, wenn die unbekannten statischen Größen (Kräfte und Momente) anhand der Gleichgewichtsbedingungen allein berechnet oder mit den Mitteln der graphischen Statik eindeutig bestimmt werden können. Dasselbe gilt für die Lagerung eines Körpersystems und seinen inneren Aufbau. Weil dann das entsprechende Gleichungssystem ebenso viele linear unabhängige Gleichungen wie Unbekannte aufweist, ist es bestimmt. Notwendige und hinreichende Bedingung ist dafür eine quadratische und reguläre Koeffizientendeterminante, die also nicht Null sein darf [1, 10]. Überwiegt aber die Zahl der Unbekannten, ist das Problem mathematisch und somit auch statisch unbestimmt [11, 12]. Fehlende Gleichungen können in solchen Fällen unter Verzicht auf das Idealbild des starren Körpers anhand des Zusammenhangs zwischen der Belastung und der Verformung aufgestellt werden. Gibt es umgekehrt mehr Gleichgewichtsbedingungen als unbekannte statische Größen, liegt eine sowohl mathematisch als auch statisch überbestimmte Aufgabe vor [1]. Dies gilt für einen einzelnen Körper (Bild 1) wie auch für ein Körpersystem, vom idealen Fachwerk aus Zug- und Druckstäben mit momentenfreien Knoten beziehungsweise Gelenken bis hin zu allgemeinen Systemen mit ebenen und räumlichen, untereinander verbundenen Elementen.

Dieser statischen Betrachtungsweise gegenüber steht die geometrisch-kinematische Sicht: Bei statisch bestimmten Körpern oder Systemen sind sämtliche Bewegungsfreiheitsgrade des Körpers beziehungsweise der Elemente eines Systems durch die Lagerung und die inneren Verbindungen genau einmal eingeschränkt. Das statisch bestimmte Problem ist also gleichzeitig auch geometrisch bzw. kinematisch bestimmt [1], eine Aussage, die auch als Föppls Satz bezeichnet wird [3]. Gibt es jedoch mehr Einschränkungen als erforderlich, wie das beim statisch unbestimmten Problem zutrifft, ist die Aufgabe kinematisch überbestimmt. Schon geringe Abweichungen oder Änderungen der Idealabmessungen führen zu Zwangskräften und entsprechenden Verformungen. Kinematisch unbestimmt ist dagegen ein Problem, wenn weniger als die gegebenen Freiheitsgrade eingeschränkt werden. Das System ist beweglich, ohne jedoch zum vornherein unbrauchbar zu sein. Dies zeigt das Beispiel eines Turmdrehkrans. Dessen freie Drehbarkeit um die vertikale Achse bei Betriebsruhe ist wesentlich, um das Schwenken in die Windrichtung zu ermöglichen. Die Aussage, ein solches bewegliches System sei labil [9], ist daher unzutreffend oder zumindest ungenau, weil ja das Gleichgewicht auch indifferent sein kann.

Die hier dargestellte Unterscheidung zwischen der statischen Aufgabe der Kräftebestimmung und der geometrischen Aufgabe der eindeutigen, zwangsfreien Lagerung und Montage der Körper ist damit eine wichtige Voraussetzung für klare und unmissverständliche Begriffe (**Tabelle 1**).

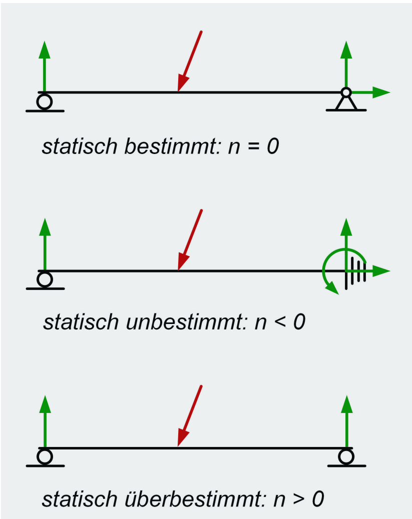


Bild 1. Begriffe der statischen Bestimmtheit. *Grafik: IWK*

Ermittlung der statischen Bestimmtheit

Statische Bestimmtheit verlangt, wie erwähnt, als notwendige und hinreichende Bedingung eine reguläre quadratische Koeffizientendeterminante. Deren Aufstellung kann bei Körpersystemen, die aus einer größeren Anzahl von Elementen bestehen, zu einer recht umfangreichen Aufgabe werden. Deshalb bedient man sich in der Praxis verbreitet einfacherer Vorgehensweisen.

Bei unkomplizierteren Fällen ist oft rasch erkennbar, ob ein Problem statisch bestimmt ist oder nicht. Ist es statisch unbestimmt, gilt es festzustellen, wie viele Bedingungen zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen erforderlich sind, um die Berechnungsaufgabe lösen zu können. Eine Möglichkeit besteht darin, die vorliegende Situation anhand von mathematischen Beziehungen zu analysieren, die sich aus den Gesetzmäßigkeiten der statischen oder der geometrisch-kinematischen Zusammenhänge ableiten lassen. Auch wenn die Bedeutung solcher Ab-

Tabelle 1. Begriffe der statischen Bestimmtheit nach der klassischen Literatur [1-3].

Situation	statisch	geometrisch (kinematisch)
gleichviel unbekannte Kräfte wie Gleichgewichtsbedingungen	bestimmt, sofern Koeffizientendeterminante ≠ 0	bestimmt
mehr unbekannte Kräfte als Gleichgewichtsbedingungen	unbestimmt	überbestimmt
weniger unbekannte Kräfte als Gleichgewichtsbedingungen	überbestimmt	unbestimmt

zählformeln nicht überbewertet werden darf; können sie ein notwendiges, jedoch nicht hinreichendes Indiz für die statische Bestimmtheit eines Körpers oder eines Systems liefern.

Bei geeigneter Aufstellung erlauben diese Formeln die Charakterisierung der statischen Aufgabe mittels einer Kennzahl, die mitunter als „Grad der statischen Unbestimmtheit“ bezeichnet wird [13, 14]. Begrifflich allgemeiner ist es jedoch, vom „Grad der statischen Bestimmtheit“ zu sprechen, um auch statisch überbestimmte Probleme mitzuerfassen. Diese Kennzahl drückt also aus, ob eine Aufgabe statisch bestimmt sein kann oder wie vielfach statisch unbestimmt oder überbestimmt sie ist. Bei statisch unbestimmten Problemstellungen gibt sie die Anzahl von Gleichungen zwischen Belastungen und Verformungen an, die zur Lösung der statischen Aufgabe zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen erforderlich sind. Bei statisch überbestimmten Problemen entspricht der Grad der statischen Bestimmtheit der Anzahl noch freier bzw. nicht eingeschränkter Freiheitsgrade.

Grad der statischen Bestimmtheit

Der Grad der statischen Bestimmtheit, hier mit dem Symbol n bezeichnet (**Tabelle 2**), ergibt sich im einfachen Fall eines einzelnen starren Körpers aus der Differenz des uneingeschränkten Freiheitsgrades f und der Anzahl r konstruktionsseitig eingeschränkter Freiheitsgrade gemäß

$$n = f - r \qquad (1)$$

In dieser kinematischen Überlegung gilt bei ebenen Problemen $f = 3$, bei räumlichen $f = 6$, und r entspricht der Summe aller Lagerwertigkeiten. Beziehung (1) liefert bei statischer Bestimmtheit $n = 0$; bei statisch unbestimmten Problemen ist $n < 0$, bei statisch überbestimmten Problemen $n > 0$. Das negative Vorzeichen bei statisch unbestimmten Problemen ergibt sich aus dem Manko an Gleichgewichtsbedingungen. In manchen Werken werden die Vorzeichen umgekehrt gehandhabt [15], was einer Multiplikation des Ausdrucks (1) mit -1 gleichkommt. Aus statischer Sicht stellt f in (1) die Anzahl verfügbarer Gleichgewichtsbedingungen dar, und r ist die Summe aller Lagerwertigkeiten.

Im statischen Ansatz, der sich an der Darstellung von Föppl [1] orientiert, entspricht der Grad der statischen Bestimmtheit der Differenz zwischen der Anzahl Gleichgewichtsbedingungen und der Zahl unbekannter statischer Größen. Bei knotenbezogener Betrachtungsweise ist das Kräftegleichgewicht an den k Knoten durch die Komponentenbedingungen gegeben, also 2 bei ebenen und 3 bei räumlichen Problemen. Unbekannte sind die s Stabkräfte und die r Lagerreaktionen. Das ergibt für ebene Probleme

$$n = 2 \cdot k - s - r \qquad (2)$$

und für räumliche Probleme

$$n = 3 \cdot k - s - r \qquad (3)$$

Wird vom Gleichgewicht der s Stäbe ausgegangen, sind pro Stab bei ebenen Problemen 3 und bei räumlichen Problemen 6 Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen oder 5, wenn die Rotation der Stäbe um die eigene Achse entfällt. Die Unbekannten sind dann nebst den r Lagerreaktionen die v Verbindungskräfte, zu denen jeder der i Knoten, der q_i Stäbe gelenkig miteinander verbindet, $v_i = 2 \cdot (q_i - 1)$ beisteuert. Somit gilt für ebene Probleme

$$n = 3 \cdot s - v - r \qquad (4)$$

und für räumliche Probleme

$$n = 5 \cdot s - v - r \qquad (5)$$

Selbstverständlich sind die unterschiedlichen Abzählformeln gleichwertig und stimmen in ihren Ergebnissen überein.

Kinematisch betrachtet [3], geht die statische Bestimmtheit eines Systems aus dem Vergleich des Gesamt-Freiheitsgrades mit den durch die Auflager und die Verknüpfungen der Elemente insgesamt eingeschränkten Freiheitsgraden hervor. Knotenbezogen bedeuten dann $2 \cdot k$ beziehungsweise $3 \cdot k$ in (2) und (3) den gegebenen Freiheitsgrad des Systems, der durch die s Stäbe und die r Lagerwertigkeiten eingeschränkt werden. Stabbezogen ist in (4) und (5) der Gesamt-Freiheitsgrad durch die 3 bzw. 5 Freiheitsgrade gegeben, die jeder der s Stäbe hat. Dieser wird durch die Knoten

Tabelle 2. Symbole und ihre Bedeutung.

f	Freiheitsgrad eines Körpers in der Ebene (3) bzw. im Raum (6)
g	zusätzliche Freiheitsgrade durch integrierte Gelenke: 1 in der Ebene bzw. im Raum je nach Gelenkart 1 oder 2
k	Anzahl Knoten
n	Grad der statischen Bestimmtheit
n_a	Grad der äußeren statischen Bestimmtheit
n_i	Grad der inneren statischen Bestimmtheit
q	Anzahl der an einem Knoten angebundenen Stäbe
r	Anzahl der durch die Lager eingeschränkten Freiheitsgrade; auch Anzahl der Lagerreaktionen (Kräfte und Momente) bzw. Summe der Lagerwertigkeiten
s	Anzahl Stäbe bzw. Scheiben inkl. Stabäquivalente
s_1	Anzahl einseitig angebundener Stäbe
s_2	Anzahl beidseitig angebundener Stäbe
v	Anzahl der durch die k Knoten innerlich eingeschränkten Freiheitsgrade

bzw. Gelenke um insgesamt v Translationen eingeschränkt.

Weil für statische Bestimmtheit das Ergebnis $n = 0$ zwar notwendig ist, aber nicht hinreichend, ist der Aufbau des betrachteten Systems noch daraufhin zu überprüfen, ob nicht ein Grenz- oder Spezialfall vorliegt [3], der es unbrauchbar macht [16]. Das sollte in der Regel mit technischem Sachverstand möglich sein.

Äußere und innere statische Bestimmtheit

Dass bei Körpersystemen die separate Betrachtung der äußeren und der inneren statischen Bestimmtheit n_a oder n_i und ihre Überlagerung

$$n = n_a + n_i \tag{6}$$

oftmals hilfreich sein kann [15], wird in der Fachliteratur erstaunlicherweise selten angesprochen.

Die äußere statische Bestimmtheit eines Körpersystems ergibt sich, wenn es mit dem Erstarrungsprinzip als in sich unbeweglich gedacht wird, d. h. wie einen Einzelkörper. Dann gilt mit (1)

$$n_a = f - r \tag{7}$$

Innerlich statisch bestimmt ist ein System, wenn es in sich selbst und ohne äußere Lagerung ein zwangsfrei aufbaubares, stabiles Ganzes bildet. Aus den Beziehungen (2) bis (5) erhält man den Grad der inneren statischen Bestimmtheit n_i, indem das System als äußerlich statisch bestimmt angenommen wird, also durch Einsetzen von $r = 3$ bei ebenen und $r = 6$ bei räumlichen Problemen. Folglich wird für ebene Probleme

$$n_i = 2 \cdot k - s - 3 \tag{8}$$

bzw.

$$n_i = 3 \cdot s - v - 3 = 3 \cdot (s - 1) - v \tag{9}$$

sowie für räumliche Probleme

$$n_i = 3 \cdot k - s - 6 \tag{10}$$

bzw.

$$n_i = 5 \cdot s - v - 6 \tag{11}$$

Am Beispiel des Dreigelenkbogens zeigt sich: Ohne Zugband ist er mit $n_a = -1$ und $n_i = 1$ statisch bestimmt (**Bild 2**). Mit einem Zugband wird er innerlich statisch bestimmt, und mit einem Loslager anstelle eines Festlagers bleibt er es auch insgesamt.

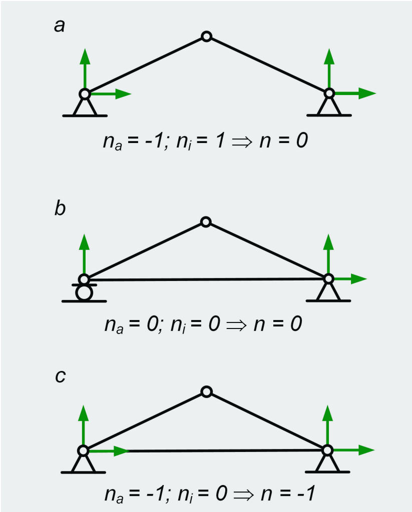


Bild 2. Statische Bestimmtheit des Dreigelenkbogens ohne und mit Zugband. *Grafik: IWK*

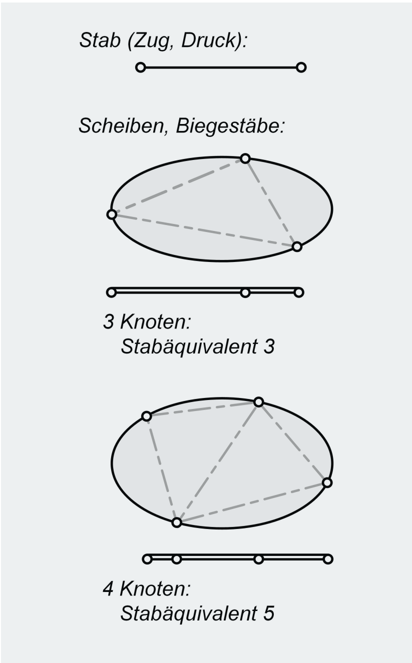


Bild 3. Scheiben und Biegestäbe mit ihren Stabäquivalenten für ebene Probleme. *Grafik: IWK*

Weitere Möglichkeiten

Wenig bekannt ist, dass die Beziehungen (2) bis (5) sowie (8) bis (11) nicht nur auf ideale Fachwerke anwendbar sind. Enthält das System auch Biegestäbe und/oder Scheiben, so können diese beim knotenbezogenen Ansatz (2) und (3) durch entsprechende Stabäquivalente miterfasst werden (**Bild 3**), was dem 1. Bildungsgesetz der Fachwerktheorie gleichkommt [1]. Analog können dreidimensionale Elemente des Systems durch Zug- und Druckstäbe dargestellt werden. Damit sind auch Lastangriffspunkte außerhalb der Knoten des Systems möglich (**Bild 4**). Weiter lassen sich auch bewegliche Stäbe berücksichtigen, die nur einseitig angebunden sind, indem deren Anzahl s_1 von jener s_2 der beidseitig angebundenen Stäbe abgezogen wird gemäß $s = s_2 - s_1$. Zwei durch einen Knoten verbundene Stäbe sind mit $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ und $k = 1$ nach (8) entsprechend $n_i = 2 \cdot 1 - (0 - 2) - 3 = 1$ einfach statisch überbestimmt bzw. einfach kinematisch unbestimmt, wie dies bei der inneren statischen Bestimmtheit des Zweigelenkbogens zutrifft (Bild 2a).

Bei der stabbezogenen Betrachtung (4) und (5) werden Biegestäbe und Scheiben wie Zug- und Druckstäbe wegen derselben Anzahl Freiheitsgrade je nur einfach gezählt, und einseitig angebundene Stäbe gelten gleichviel wie die beidseitig angebundenen, also $s = s_2 + s_1$. Dreidimensionale Körper in räumlichen Problemen verlangen in (5) den Gesamt-Freiheitsgrad $6 \cdot s$ anstelle von $5 \cdot s$.

Einfachere Körpersysteme, die Gelenke enthalten und deswegen innerlich statisch überbestimmt sind, können mit der um die Summe g aller Gelenkfunktionen erweiterten Beziehung (1)

$$n = f + g - r \tag{12}$$

auf statische Bestimmtheit untersucht werden. Jedes Gelenk bewirkt entsprechend seiner Funktion eine Erhöhung des System-Freiheitsgrades um $g_i = q_i - 1$ (**Tabelle 3**). Das Gelenk unterscheidet sich vom Knoten dadurch, dass bei Wegfall der äußeren Lagerung eine gewisse Beweglichkeit innerhalb des Systems besteht. Dies kann exemplarisch am Dreigelenkbogen (Bild 2a) oder am Gerberträger überprüft werden. Dieselbe

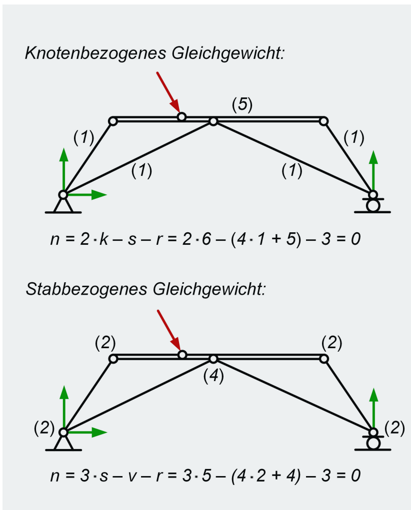
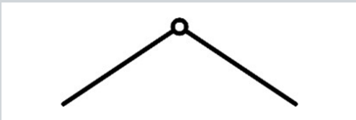
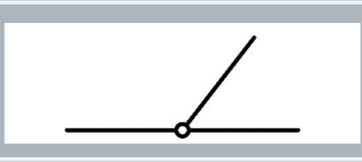
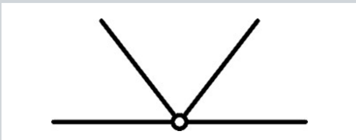
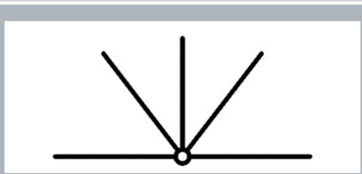


Bild 4. Statische Bestimmtheit eines Körpersystems mit Biegestab und Lastangriff außerhalb von System-Knoten. *Grafik: IWK*

Tabelle 3. Kinematische Wertigkeiten von Gelenken mit der Stabzahl q_i: je Gelenk zusätzlich eingeschränkte Freiheitsgrade.

Gelenk, Knoten	Gelenkwertigkeit v_i	
	eben $2 \cdot (q_i - 1)$	räumlich $3 \cdot (q_i - 1)$
	2	3
	4	6
	6	9
	8	12

Gesetzmäßigkeit erlaubt die Feststellung des statischen Bestimmtheitsgrades *n* von Systemen, die als statisch unbestimmt erkannt werden. Man verändere gedanklich das System durch schrittweisen Einbau geeigneter virtueller Gelenke bis zur statischen Bestimmtheit. Dann entspricht die Anzahl *g* der „eingebauten" Gelenkfunktionen dem Grad der statischen Bestimmtheit des ursprünglichen Systems (**Bild 5**).

Auf ähnlich intuitive Weise kann der Grad der statischen Bestimmtheit durch schrittweisen Aufbau des realen Systems aus einem ähnlichen, aber statischen bestimmten Grundsystem ermittelt werden, d. h. durch Hinzufügen von Elementen und Bindungen, oder dann umgekehrt durch sukzessives Entfernen von Elementen und Bindungen des realen Systems, bis statische Bestimmtheit erreicht ist [15].

Abschließende Gedanken

Diese Betrachtungen wollen weder das Thema statische Bestimmtheit abgerundet darstellen noch den Ursachen für die beobachtete Verwässerung der Fachbegriffe nachgehen, auch wenn beides grundsätzlich von Interesse wäre. Sie beschränken sich auf die Darlegung der Terminologie der statischen Bestimmtheit vor ihrem sachlogischen Hintergrund aus Statik, Kinematik und Mathematik. Dies in der Überzeugung, dass ihre korrekte Handhabung in der Fachsprache ein wichtiges Anliegen im Hinblick auf die Verständigung innerhalb der Fachwelt ist und vor allem jenen obliegt, die berufen sind, Wissen weiterzugeben, sei es als Lehrende oder als Autoren. ■

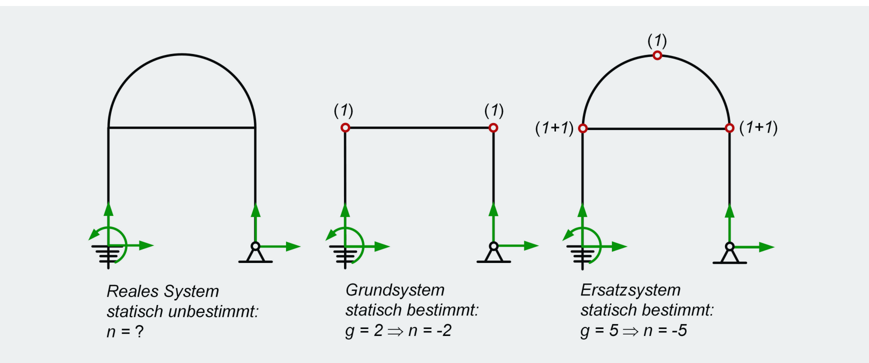
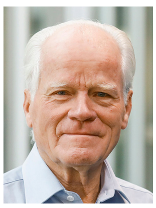


Bild 5. Bestimmung der statischen Bestimmtheit eines Systems durch Abzählen der Wertigkeiten virtuell eingefügter Gelenke *Grafik: IWK*

Literatur

[1] Föppl, A.: Vorlesungen über Technische Mechanik, Zweiter Band: Graphische Statik. Verlag von B. G. Teubner Leipzig 1900
[2] Kurrer, K.-E.: Geschichte der Baustatik. 2. Aufl., Ernst & Sohn Berlin 2015
[3] Egerer, H.: Ingenieur-Mechanik. Verlag von Julius Springer Berlin 1919
[4] Selke, P: Statik. De Gruyter Verlag Berlin 2018
[5] Wikipedia, Fachwerk; aufgerufen am 16.1.2024
[6] Dankert, J., Dankert, H.: Technische Mechanik – Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik. 7. Aufl., Springer Verlag Berlin 2013
[7] Wikipedia, Statische Bestimmtheit; aufgerufen am 16.1.2024
[8] Hahn, H. G.: Technische Mechanik fester Körper. Carl Hanser Verlag München 1990
[9] Villwock, J., Hanau A.: Statik starrer Körper. In: Bender, B., Göhlich, D. (Hrsg.): Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau 1 – Grundlagen und Tabellen. 26. Aufl., Springer Verlag Berlin 2020
[10] Marguerre, K.: Technische Mechanik, Erster Teil: Statik. Heidelberger Taschenbücher, Band 20. Springer Verlag Berlin 1967
[11] Föppl, A.: Vorlesungen über Technische Mechanik, Erster Band: Einführung in die Mechanik. Verlag von B. G. Teubner Leipzig 1898
[12] Timoshenko, S. P., Young, D. H.: Engineering Mechanics. 4th Ed., McGraw-Hill Kogakusha Tokyo 1956
[13] Göldner, H.: Leitfaden der Technischen Mechanik. 2. Aufl., VEN Fachbuchverlag Leipzig 1967
[14] Assmann, B., Selke, P.: Technische Mechanik 1 – Statik. 19. Aufl., Oldenbourg Verlag München 2010
[15] Stüssi, F.: Baustatik, Band II. Verlag Birkhäuser Basel 1954
[16] Stüssi, F.: Baustatik, Band I. Verlag Birkhäuser Basel 1946



Prof. Dipl.-Ing. **Johannes Kunz**,
Institutspartner,
IWK Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung Rapperswil an der OST Ostschweizer Fachhochschule

Eichwiesstraße 18b
CH-8645 Rapperswil-Jona

johannes.kunz@ost.ch
www.ost.ch/iwk

Foto: privat

© VDI Fachmedien GmbH & Co. KG, Düsseldorf 2024